

# Verifica e progetto allo stato limite ultimo di pilastri in c.a. a sezione rettangolare: un metodo semplificato

Aurelio Gheri, Marco Muratore

## Sommario

L'uso del metodo degli stati limite per la verifica ed il progetto di pilastri è diventato necessario per il progettista strutturale, dopo l'emanazione della nuova norma sismica (Ordinanza 3274). In questo lavoro gli autori affrontano in maniera approfondita il problema della pressoflessione, retta e deviata, per sezioni rettangolari in c.a., mostrando come l'utilizzo del metodo degli stati limite consenta l'adozione di formule di progetto e di verifica efficaci ed estremamente semplici.

## Summary

The new Italian seismic code (Ordinanza 3274) imposes the use of limit state method in the design and check of structural cross-sections. In the paper, the authors thoroughly examine the problem of rectangular r.c. cross-sections subjected to eccentric axial force, pointing out the advantages of the ultimate limit state approach, which allows the use of very simple and effective formulations.

## Keywords

Verifica e progetto in zona sismica, cemento armato, pressoflessione retta e deviata.

Seismic check and design, reinforced concrete, eccentric axial force.

## Introduzione

La maggior parte dei progettisti strutturali trova veramente familiare il metodo delle tensioni ammissibili, ed è un po' spaventata dalla novità e dalle apparenti complicazioni introdotte dal metodo degli stati limite. In realtà, la "facilità" del metodo delle tensioni ammissibili non è dovuta solo alla "abitudine all'uso" di tale metodo. Essa dipende infatti, soprattutto, dal fatto che, in tanti anni di utilizzo, si sono scartati tutti gli aspetti complicati ma non essenziali e si è arrivati all'individuazione di formule semplici per la verifica o il progetto di sezioni ed armature. Pian piano ciò sta avvenendo anche per le verifiche allo stato limite ultimo e si può quindi affermare che, dal punto di vista computazionale, queste verifiche non presentano particolari complicazioni rispetto a quanto si era soliti fare nel passato.

L'unico caso in cui nell'ambito del metodo delle tensioni ammissibili non si è giunti a formule di uso veramente immediato è quello della pressoflessione. Il dimensionamento dei pilastri di edifici siti in zona sismica, tipico esempio di aste pressoinflesse, è in genere effettuato sulla base del solo sforzo normale, scegliendo le dimensioni della sezione in maniera tale da avere una tensione media adeguatamente bassa. La verifica andrebbe fatta determinando il nocciolo centrale d'inerzia della sezione, per sapere se essa è tutta compressa o parzializzata, ed in questo secondo caso calcolando la posizione dell'asse neutro con espressioni non proprio semplici. Più comunemente, per la verifica ed il progetto delle armature si utilizzano domini di interazione, ovvero curve che rappresentano le coppie  $M-N$  ammissibili (con riferimento alla pressoflessione retta). Essi vengono costruiti punto per punto, a partire da diagrammi di tensioni che raggiungono il valore ammissibile del calcestruzzo o dell'acciaio ad un estremo e presentano valori inferiori in tutto il resto della sezione. Per ciascuna sezione vengono in genere tracciate più curve, corrispondenti a diverse quantità di armatura (Fig. 1).

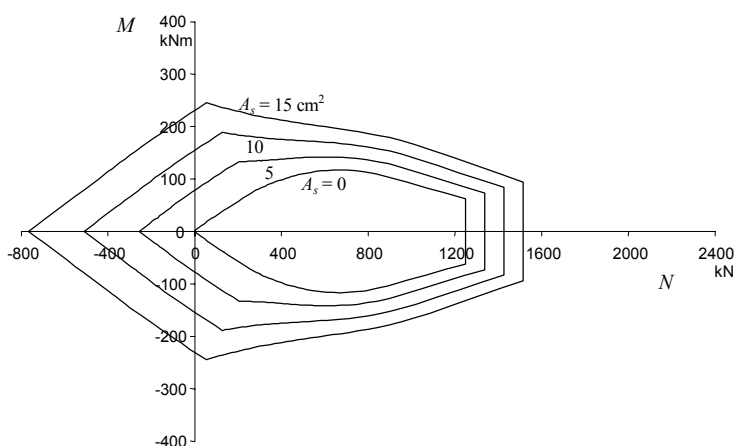


Fig. 1. Dominio  $M$ - $N$  per sezione  $30 \times 70$  – metodo delle tensioni ammissibili

Anche operando allo stato limite ultimo è possibile determinare domini di interazione che rappresentano le coppie  $M$ - $N$  limite (Fig. 2), cioè che corrispondono – in questo caso – a diagrammi di deformazione che raggiungono ad un estremo il valore limite per il calcestruzzo o per l'acciaio e presentano in tutto il resto della sezione valori inferiori. La forma di questi domini è però molto più regolare e si presta, almeno per le sezioni rettangolari e circolari, ad essere rappresentata con relazioni analitiche semplici.

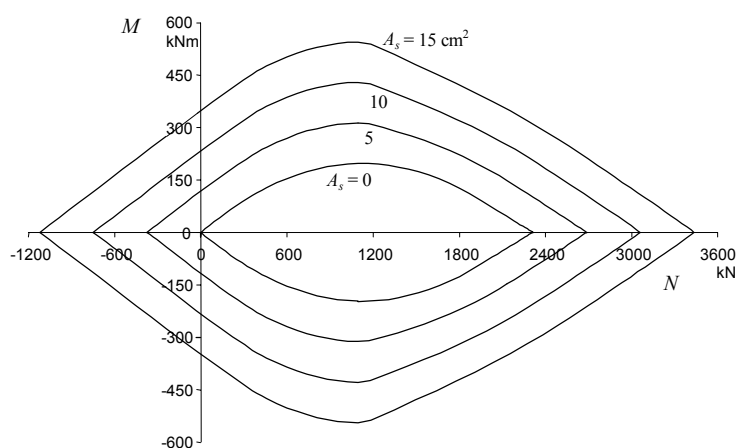


Fig. 2. Dominio  $M$ - $N$  per sezione  $30 \times 70$  – stato limite ultimo

Ancor più problematica, dal punto di vista applicativo, è apparsa finora la pressoflessione deviata. Anche se, concettualmente, essa è solo una generalizzazione della pressoflessione retta, la complicazione indotta dall'inclinazione dell'asse di sollecitazione e dell'asse neutro induce anche il professionista o lo studioso più volenteroso a rinunciare all'effettuazione manuale della verifica. E, contemporaneamente, la difficoltà di rappresentare nel piano domini dipendenti da tre variabili (lo sforzo normale e le due componenti di momento) ha impedito la diffusione di curve di interazione utilizzabili per la pressoflessione deviata. Anche per questo caso, però, la maggior regolarità dei domini allo stato limite ultimo consente la formulazione di espressioni approssimate utilizzabili con estrema facilità e con buona accuratezza.

Nei paragrafi che seguono viene innanzitutto richiamato, in maniera sintetica ma completa, il procedimento generale che si utilizza per la costruzione dei domini limite. Vengono poi ricavate le espressioni analitiche che forniscono i valori di  $M$  ed  $N$  corrispondenti ad alcuni punti significativi. Viene infine mostrato come sia possibile sostituire al dominio reale una curva costituita da tratti curvilinei e tratti lineari, con un errore minimo, pienamente accettabile ai fini progettuali. La semplicità delle equazioni che descrivono le curve utilizzate consente di effettuare la verifica mediante

espressioni analitiche di immediato utilizzo e fornisce anche utili indicazioni per il progetto delle armature.

## A) Pressoflessione retta

### Procedimento rigoroso per la costruzione del dominio limite

La curva di frontiera del dominio limite è l'insieme delle coppie  $M-N$  che corrispondono a diagrammi di deformazioni limite, cioè diagrammi di  $\varepsilon$  che raggiungono la deformazione massima del materiale in un punto e non superano tale valore in nessun altro punto. Per il calcestruzzo si adotta usualmente nel calcolo un legame costitutivo rappresentato da un tratto parabolico ed un tratto costante (Fig. 3 a); per sezione parzializzata il limite alla deformazione è dato dal valore  $\varepsilon_{cu}$ , pari a  $3.5 \times 10^{-3}$ ; nel caso di sezione tutta compressa il limite è invece costituito dal raggiungimento della deformazione  $\varepsilon_{c1}$  (pari a  $2 \times 10^{-3}$ ) in un punto situato a  $3/7$  dell'altezza, misurati dal bordo maggiormente compresso. Per l'acciaio il legame costitutivo presenta un tratto lineare ed un tratto costante (Fig. 3 b); quest'ultimo veniva tradizionalmente interrotto in corrispondenza della deformazione  $\varepsilon_{su}$  pari a  $10 \times 10^{-3}$ , ma l'Eurocodice 2 consente di non porre limiti alla deformazione dell'acciaio (anche perché il risultato – cioè il dominio limite – rimane sostanzialmente invariato).

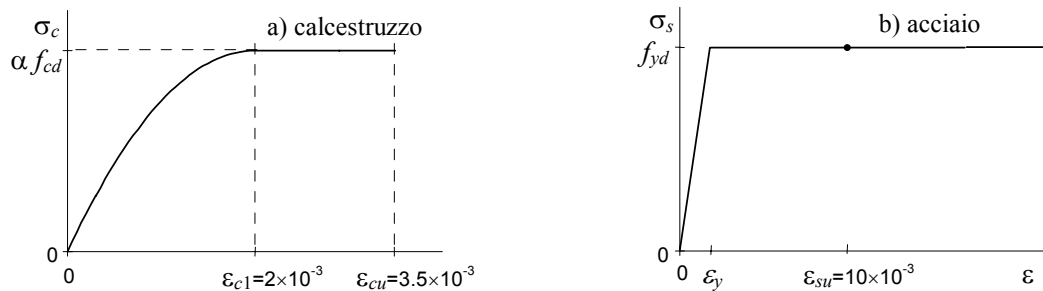


Fig. 3. Legame costitutivo di calcolo per calcestruzzo e acciaio

Uno degli infiniti diagrammi limite è mostrato nella figura 4 a. Utilizzando i legami costitutivi dei materiali, dai valori della deformazione si può risalire in maniera univoca ai valori delle tensioni in calcestruzzo e acciaio,  $\sigma_c$  e  $\sigma_s$ , ottenendo i diagrammi mostrati nella figura 4 b. Note le tensioni, si possono ricavare i valori di  $N$  ed  $M$  dalla loro definizione stessa

$$N = \int_{cls} \sigma_c dA_c + \int_{acc} \sigma_s dA_s = N_c + N_s \quad (1)$$

$$M = \int_{cls} \sigma_c y dA_c + \int_{acc} \sigma_s y dA_s = M_c + M_s$$

Nelle espressioni si è evidenziato in maniera distinta il contributo del calcestruzzo e dell'armatura. Si noti che, nonostante la non linearità dei legami costitutivi, il contributo dell'armatura varia con legge lineare con  $A_s$  se tutta l'armatura viene incrementata proporzionalmente.

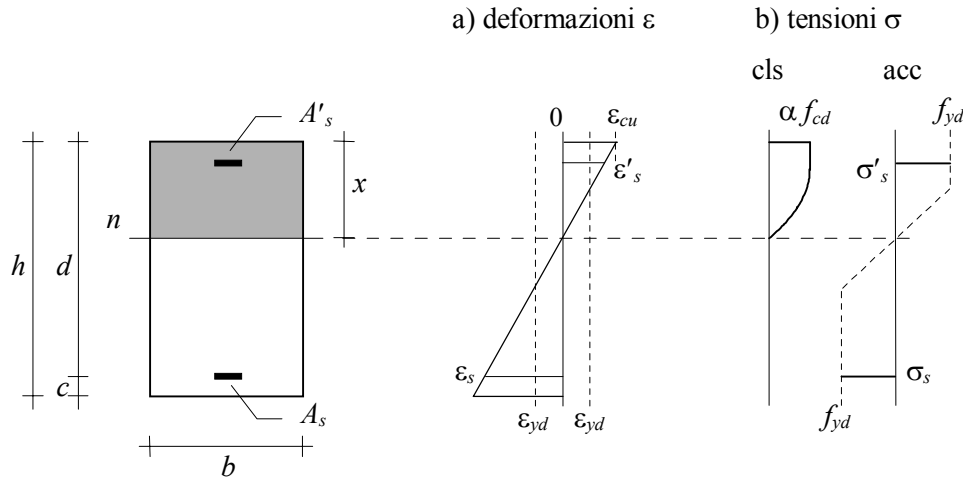


Fig. 4. Diagramma limite di deformazioni e corrispondenti diagrammi di tensione

### Determinazione dei punti più significativi del dominio limite

Per rappresentare il dominio limite è essenziale individuare i valori  $M$  ed  $N$  corrispondenti ad alcuni punti particolarmente rilevanti. Coerentemente con le applicazioni usuali nei pilastri di forma rettangolare, si assume che l'armatura sia simmetrica, cioè che  $A_s = A'_s$ ; si considera positivo uno sforzo normale di compressione, negativo uno di trazione. È immediato determinare lo sforzo normale corrispondente a trazione pura (dato dal solo contributo delle armature)

$$N = -2 A_s f_{yd} \quad (2)$$

e quello corrispondente a compressione pura (dato dal contributo del calcestruzzo e delle armature)

$$N = b h \alpha f_{cd} + 2 A_s f_{yd} \quad (3)$$

Un'altra coppia fondamentale è quella fornita dal valore massimo del momento flettente che può essere sopportato dalla sezione e dal corrispondente valore dello sforzo normale. Si può ipotizzare – a patto di verificare alla fine se l'ipotesi è corretta – che il massimo momento flettente sia raggiunto per un diagramma di  $\varepsilon$  analogo a quello mostrato nella figura 4, in cui entrambe le armature sono snervate (quella superiore a compressione, quella inferiore a trazione). La risultante delle tensioni nel calcestruzzo vale  $N_c = \beta b x \alpha f_{cd}$ , con  $\beta = 17/21 \cong 0.810$ , ed è posizionata ad una distanza  $\kappa x$  dal bordo superiore, con  $\kappa = 99/238 \cong 0.416$ . La risultante delle tensioni nelle armature inferiori e superiori vale  $N_s = N'_s = A_s f_{yd}$ . Le corrispondenti caratteristiche della sollecitazione sono quindi

$$N = N_c + N'_s - N_s = \beta b x \alpha f_{cd}$$

$$M = N_c \left( \frac{h}{2} - \kappa x \right) + N_s \left( \frac{h}{2} - c \right) + N'_s \left( \frac{h}{2} - c \right) = \beta b x \alpha f_{cd} \left( \frac{h}{2} - \kappa x \right) + 2 A_s f_{yd} \left( \frac{h}{2} - c \right) \quad (4)$$

Sia lo sforzo normale che il momento flettente dipendono dalla distanza  $x$  dell'asse neutro dal bordo compresso. Il momento flettente raggiunge il massimo quando la sua derivata rispetto ad  $x$  si annulla. Si ha quindi

$$\frac{dM}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta b \alpha f_{cd} \left( \frac{h}{2} - 2 \kappa x \right) = 0$$

e quindi

$$x = \frac{h}{4 \kappa} = \frac{119}{198} h \cong 0.60 h \quad (5)$$

Sostituendo il valore di  $x$  nelle espressioni di  $N$  ed  $M$  si ottiene

$$N = \frac{\beta}{4 \kappa} b h \alpha f_{cd} \quad (6)$$

$$M = \frac{\beta}{16 \kappa} b h^2 \alpha f_{cd} + A_s (h - 2 c) f_{yd}$$

ovvero

$$N = \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd} \cong 0.48 b h \alpha f_{cd} \quad (6')$$

$$M = \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd} + A_s (h - 2 c) f_{yd} \cong 0.12 b h^2 \alpha f_{cd} + A_s (h - 2 c) f_{yd}$$

Si può, infine, facilmente controllare che per tale posizione dell'asse neutro le armature sono entrambe snervate a condizione che sia

$$c \leq \left( \frac{79}{198} - \frac{119}{198} \frac{\varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{cu}} \right) h \quad (7)$$

ovvero per  $c \leq 0.0873 h$  se si usa un acciaio FeB44k e per  $c \leq 0.127 h$  se si usa un acciaio FeB38k. L'ipotesi fatta è quindi usualmente verificata per un pilastro rettangolare orientato in modo da avere inerzia massima, mentre può non esserlo quando esso è sollecitato nel piano di inerzia minima. L'errore che si commette in quest'ultimo caso è comunque molto modesto.

### Rappresentazione approssimata del dominio limite

Manipolando le espressioni (4), e più precisamente ricavando dalla prima equazione la  $x$  in funzione di  $N$  e sostituendo nella seconda, si nota che  $M$  dipende da  $N$  mediante una relazione quadratica

$$M = N \left( \frac{h}{2} - \frac{\kappa}{\beta b \alpha f_{cd}} N \right) + A_s (h - 2 c) f_{yd} \quad (8)$$

e quindi che il dominio  $M-N$  è, almeno per un tratto, parabolico. Si noti che in assenza di armatura ciò vale finché la sezione è parzializzata, cioè per oltre l'80% della curva. La presenza di armatura comporta la traslazione della curva di una quantità linearmente proporzionale ad  $A_s$ , ma ne restringe la validità ai casi in cui l'armatura è tutta snervata, cioè all'incirca tra un valore di  $N$  prossimo allo zero ed il punto di massimo (tratti più marcati, in Fig. 5).

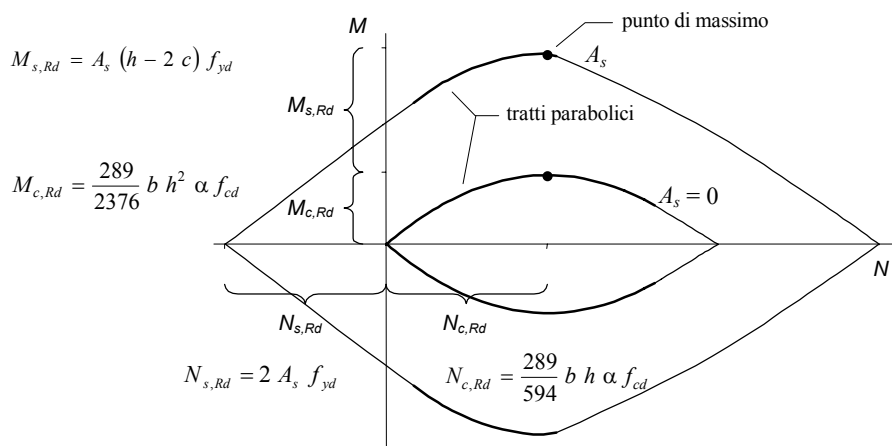


Fig. 5. Valori base per la costruzione del dominio limite  $M-N$

Partendo da questa considerazione analitica, oltre che da un esame visivo del dominio, si può ritenere che la curva che delimita il dominio limite  $M-N$  possa considerarsi costituita da tre tratti:

- un tratto lineare, per valori dello sforzo normale negativi (cioè di trazione);

- un tratto parabolico, per valori dello sforzo normale di compressione, compresi tra 0 e lo sforzo normale corrispondente al punto di massimo;
- un tratto con esponente dipendente dalla quantità di armatura (parabolico per solo calcestruzzo, ma via via più prossimo al lineare al crescere dell'armatura) per valori dello sforzo normale di compressione superiori a quello corrispondente al punto di massimo.

L'equazione dei tre tratti può essere espressa in funzione di valori già definiti nel paragrafo precedente, che si indicheranno con i seguenti simboli:

$$\begin{aligned} N_{c,Rd} &= \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd} & M_{c,Rd} &= \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd} \\ N_{s,Rd} &= 2 A_s f_{yd} & M_{s,Rd} &= A_s (h - 2 c) f_{yd} \end{aligned} \quad (9)$$

La relazione tra momento limite  $M_{Rd}$  e sforzo normale limite  $N_{Rd}$  può essere espressa mediante le relazioni seguenti

- per  $N_{Rd}$  minore di 0 (tensoflessione)

$$M_{Rd} = M_{s,Rd} \left( 1 + \frac{N_{Rd}}{N_{s,Rd}} \right) \quad (10 a)$$

- per  $N_{Rd}$  compreso tra 0 e  $N_{c,Rd}$

$$M_{Rd} = M_{c,Rd} \left[ 1 - \left( \frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd}} \right)^2 \right] + M_{s,Rd} \quad (10 b)$$

- per  $N_{Rd}$  maggiore di  $N_{c,Rd}$

$$M_{Rd} = (M_{c,Rd} + M_{s,Rd}) \left[ 1 - \left| \frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right|^n \right] \quad \text{con} \quad n = 1 + \left( \frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right)^2 \quad (10 c)$$

La figura 6 riporta nella parte superiore, con linea più marcata, le curve corrispondenti a tali equazioni, mostrando l'ottima rispondenza con le curve ottenute in maniera rigorosa.

Un'alternativa, meno precisa ma ancora pienamente accettabile, consiste nel considerare un'unica curva con esponente dipendente dalla quantità di armatura (parabolica per solo calcestruzzo, ma via via più prossima al lineare al crescere dell'armatura), utilizzando per tutti i valori di  $N$  l'espressione

$$M_{Rd} = (M_{c,Rd} + M_{s,Rd}) \left[ 1 - \left| \frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right|^m \right] \quad \text{con} \quad m = 1 + \left( \frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right) \quad (11)$$

La figura 6 riporta nella parte inferiore, con linea più marcata, la curva corrispondente a tale equazione. Si può notare che essa è leggermente a vantaggio di sicurezza nel caso di sezione compressa con sforzo normale inferiore ad  $N_{c,Rd}$ , situazione nella quale ricadono frequentemente i pilastri progettati per sopportare l'azione sismica.

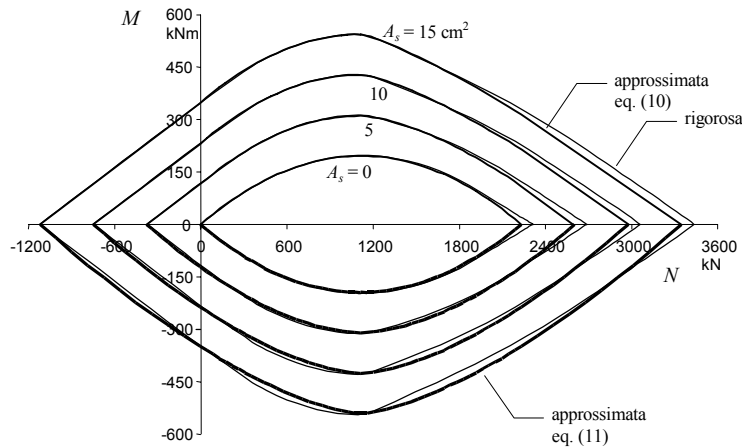


Fig. 6. Dominio  $M-N$  per sezione  $30 \times 70$  allo stato limite ultimo, esatto e approssimato

## Verifica e progetto a pressoflessione retta

### Verifica

La verifica a pressoflessione retta può essere facilmente effettuata utilizzando le espressioni riportate nel paragrafo precedente. Essa richiede preliminarmente la determinazione dei valori base di riferimento  $N_{c,Rd}$ ,  $M_{c,Rd}$ ,  $N_{s,Rd}$  e  $M_{s,Rd}$ , mediante le espressioni (9). Si può quindi ricavare dalle espressioni (10) o (11) il massimo momento che può essere sopportato dalla sezione, in funzione dello sforzo normale agente, e confrontarlo con quello sollecitante. In maniera del tutto equivalente, la verifica può essere condotta utilizzando le seguenti disequazioni (nelle quali il momento sollecitante  $M_{Sd}$  è considerato sempre col segno positivo, data la simmetria del dominio rispetto all'asse delle ascisse)

- per  $N_{Sd}$  minore di 0 (tensoflessione)

$$\frac{M_{Sd}}{M_{s,Rd}} - \frac{N_{Sd}}{N_{s,Rd}} \leq 1 \quad (12 a)$$

- per  $N_{Sd}$  compreso tra 0 e  $N_{c,Rd}$

$$\frac{M_{Sd} - M_{s,Rd}}{M_{c,Rd}} + \left( \frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd}} \right)^2 \leq 1 \quad (12 b)$$

- per  $N_{Sd}$  superiore a  $N_{c,Rd}$

$$\frac{M_{Sd}}{M_{c,Rd} + M_{s,Rd}} + \left| \frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right|^n \leq 1 \quad \text{con} \quad n = 1 + \left( \frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right)^2 \quad (12 c)$$

o, in alternativa, per qualsiasi valore di  $N_{Sd}$

$$\frac{M_{Sd}}{M_{c,Rd} + M_{s,Rd}} + \left| \frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right|^m \leq 1 \quad \text{con} \quad m = 1 + \left( \frac{N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{s,Rd}} \right) \quad (13)$$

### Progetto della sezione

Le espressioni (10) possono essere trasformate in formule per il progetto della sezione, riottenendo la nota relazione, valida per la flessione semplice, che consente di definire la sezione in funzione del momento flettente agente

$$d = r \sqrt{\frac{M}{b}} \quad (14)$$

Il coefficiente  $r$  è in questo caso dipendente dallo sforzo normale adimensionalizzato  $v = N_{Sd} / 2 N_{c,Rd}$  e della percentuale geometrica di armatura che si vuole disporre  $\rho = A_s / b h$ , oltre che dalle caratteristiche dei materiali. I valori di  $r$  riportati in Tabella 1, ottenuti con le espressioni descritte in Appendice, sono validi se le dimensioni della sezione sono espresse in metri ed il momento flettente in kNm (dovrebbero essere moltiplicati per 10 se si usasse il sistema tecnico esprimendo le dimensioni in cm ed il momento flettente in kg cm).

Tabella 1. Valori di  $r$  per calcestruzzo di classe  $R_{ck} = 25$  MPa, acciaio FeB44k,  $c/h = 0.1$

$v$	$\rho=0$	$\rho=0.002$	$\rho=0.004$	$\rho=0.006$	$\rho=0.008$	$\rho=0.010$
0.0	-	0.0368	0.0260	0.0212	0.0184	0.0165
0.1	0.0410	0.0274	0.0220	0.0189	0.0168	0.0153
0.2	0.0307	0.0236	0.0199	0.0175	0.0158	0.0145
0.3	0.0268	0.0217	0.0187	0.0167	0.0152	0.0140
0.4	0.0251	0.0207	0.0181	0.0162	0.0148	0.0138
0.5	0.0246	0.0204	0.0179	0.0161	0.0147	0.0137
0.6	0.0251	0.0210	0.0184	0.0165	0.0152	0.0141
0.7	0.0268	0.0222	0.0193	0.0173	0.0158	0.0146
0.8	0.0307	0.0243	0.0208	0.0184	0.0166	0.0153
0.9	0.0410	0.0281	0.0229	0.0198	0.0177	0.0161
1.0	-	0.0357	0.0262	0.0218	0.0190	0.0171

### Progetto dell'armatura

L'espressione (10 b), che rappresenta l'andamento del secondo tratto (una parabola, traslata parallelamente in funzione della quantità di armatura) consente di ottenere anche delle semplici formule per il progetto dell'armatura. Basta infatti calcolare il momento che deve essere affidato alle armature

$$M_{Sd,red} = M_{Sd} - M_{c,Rd} \left[ 1 - \left( \frac{N_{Sd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd}} \right)^2 \right] \quad (15)$$

e ricavare l'armatura necessaria per portare tale momento

$$A_s = \frac{M_{Sd,red}}{z f_{yd}} \quad (16)$$

nella quale  $z$  è il braccio della coppia interna costituita dalle armature, pari ad  $h - 2c$  (ma, volendo, si può utilizzare ancora, con buona approssimazione, l'espressione  $z \cong 0.9d$ , consueta nella flessione semplice). Questa formula di progetto è valida, a rigore, solo per  $N_{Sd}$  compreso tra 0 e  $N_{c,Rd}$ , ma può fornire un utile riferimento anche al di là di tale intervallo, notando che essa è cautelativa per la tensoflessione, a svantaggio di sicurezza per forte compressione.

## B) Pressoflessione deviata

### Costruzione del dominio limite

Il procedimento per la costruzione del dominio limite  $M_y$ - $M_z$ - $N$  ricalca concettualmente quello già descritto per la pressoflessione retta, ma si presenta notevolmente più complicato a causa della possibile inclinazione dell'asse neutro. Dal punto di vista geometrico, inoltre, occorre tenere presente che le armature sono disposte lungo tutti i quattro lati della sezione rettangolare (nella pressoflessione retta si considerano, di solito, solo le armature su due lati). A rigore, bisognerebbe tener conto della posizione di ciascuna barra, ma è ugualmente accettabile (e più semplice) ipotizzare che l'ar-



matura sia disposta uniformemente lungo ciascun lato, purché si mantenga l'indipendenza tra la quantità di armatura disposta nei lati paralleli a  $z$ ,  $A_{sz}$ , e in quelli paralleli a  $y$ ,  $A_{sy}$  (Fig. 7).

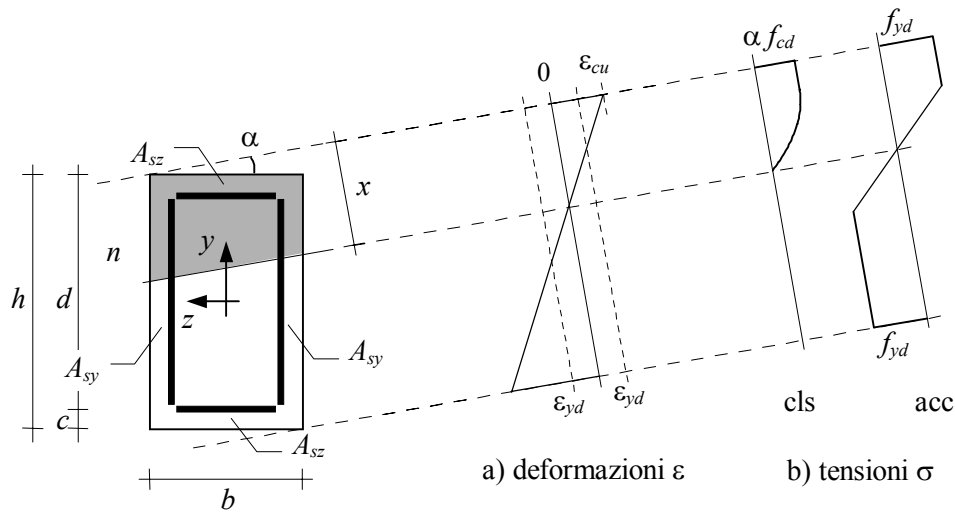


Fig. 7. Diagramma limite di deformazioni e diagrammi di tensione per pressoflessione deviata

Un generico diagramma limite di deformazione (Fig. 7 a) è individuato dall'inclinazione  $\alpha$  dell'asse neutro e, se la sezione è parzializzata, dalla sua distanza  $x$  dallo spigolo compresso (o, se la sezione è tutta compressa, dalla deformazione nello spigolo compresso). Utilizzando i legami costitutivi dei materiali si possono ricavare i valori delle tensioni (Fig. 7 b) e quindi le caratteristiche della sollecitazione

$$N = \int_{cls} \sigma_c dA_c + \int_{acc} \sigma_s dA_s = N_c + N_s$$

$$M_y = -\int_{cls} \sigma_c z dA_c - \int_{acc,y} \sigma_s z dA_s - \int_{acc,z} \sigma_s z dA_s = M_{y,c} + M_{y,sy} + M_{y,sz} \quad (17)$$

$$M_z = \int_{cls} \sigma_c y dA_c + \int_{acc,y} \sigma_s y dA_s + \int_{acc,z} \sigma_s y dA_s = M_{z,c} + M_{z,sy} + M_{z,sz}$$

Facendo variare con continuità i due parametri si ottengono le infinite triplete che descrivono il dominio (Fig. 8 a). Si può notare che la frontiera del dominio ha un andamento marcatamente convesso, a differenza di quello approssimativamente lineare o addirittura concavo che si riscontra nei domini alle tensioni ammissibili (Fig. 8 b).

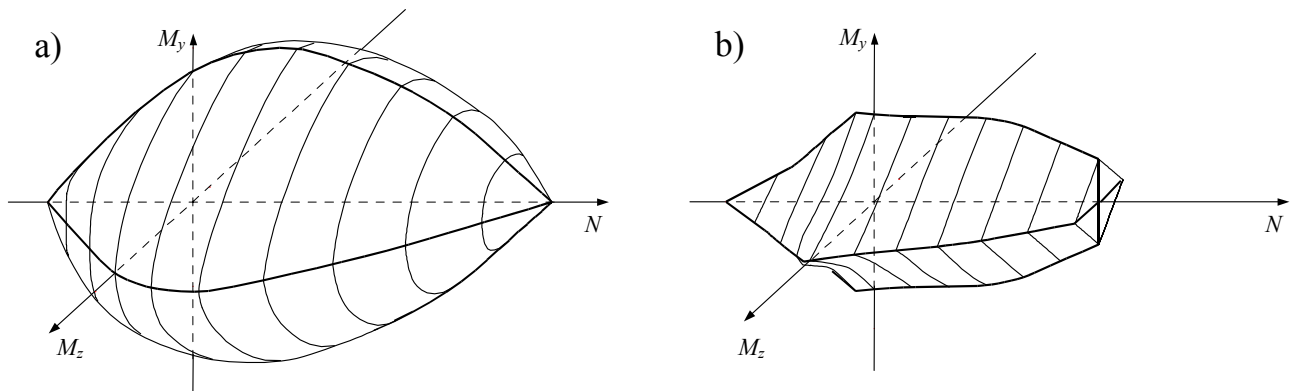


Fig. 8. Dominio  $M_y$ - $M_z$ - $N$  per pressoflessione deviata: a) stato limite ultimo; b) tensioni ammissibili

## Andamento rigoroso e rappresentazione approssimata delle sezioni del dominio

I classici domini limite per pressoflessione retta non sono altro che sezioni del dominio tridimensionale nei piani  $M_y$ - $N$  o  $M_z$ - $N$  (a meno dell'approssimazione dovuta al considerare l'armatura solo su due lati). Per una migliore comprensione del reale andamento del dominio occorre prendere in esame le sezioni trasversali del dominio, parallele al piano  $M_y$ - $M_z$  (Fig. 9 a).

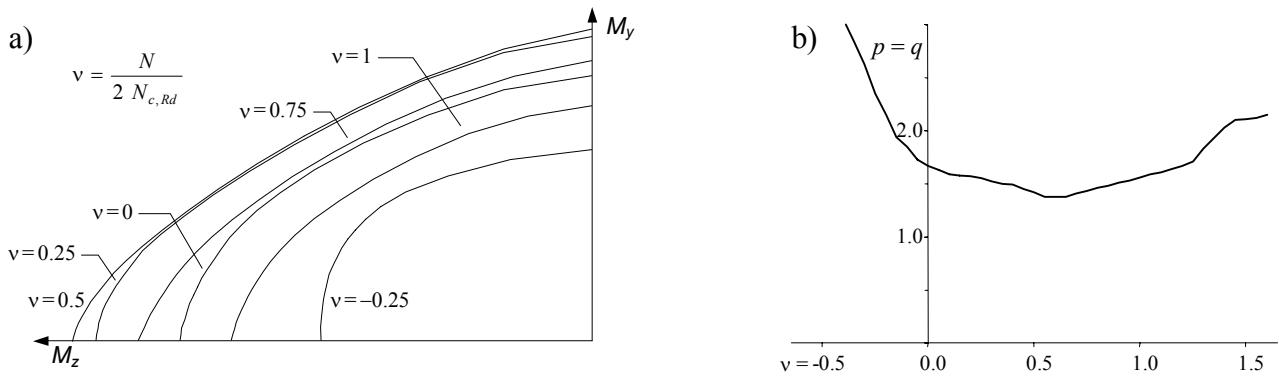


Fig. 9. Relazione tra  $M_z$  e  $M_y$  per diversi valori di  $N$  (sezione  $30 \times 70$ ,  $A_{sz} = 15 \text{ cm}^2$ ,  $A_{sy} = 6 \text{ cm}^2$ )

La curva che rappresenta la sezione del dominio per un assegnato valore di  $N$  può essere ben approssimata, in funzione dei momenti resistenti  $M_{z,Rd}$  e  $M_{y,Rd}$  calcolati (in corrispondenza di  $N$ ) per pressoflessione retta, mediante la relazione

$$\left( \frac{M_z}{M_{z,Rd}} \right)^p + \left( \frac{M_y}{M_{y,Rd}} \right)^q = 1 \quad (18)$$

con una opportuna scelta degli esponenti  $p$  e  $q$ . I risultati ottenuti dagli autori per un'ampia gamma di sezioni ed armature mostrano che il valore minimo dell'esponente (1.4÷1.5) deve essere utilizzato in corrispondenza dello sforzo normale che rende massimo il momento flettente ( $N_{Sd} = N_{c,Rd}$ , ovvero  $v=0.5$ ). L'esponente cresce al diminuire di  $N$ , arrivando a valori superiori a 2 per sforzi normali negativi, ed anche, ma in misura minore, all'aumentare di  $N$  (Fig. 9 b). Si suggerisce pertanto di utilizzare, in via cautelativa, l'esponente 1.5 per qualsiasi valore dello sforzo normale.

## Contributo dell'armatura "secondaria" nella pressoflessione retta

L'espressione (18) può diventare un agevole strumento per la verifica a pressoflessione deviata se ad essa si accoppiano le relazioni che forniscono – per pressoflessione retta – il momento resistente in funzione dello sforzo normale. Nel valutare questo occorre però, per una maggiore precisione, tener presente anche il contributo dell'armatura "secondaria", disposta ortogonalmente all'asse neutro. Questa armatura contribuisce pienamente alla resistenza a sforzo assiale, ma dà un contributo minore alla resistenza a flessione sia per il minor braccio che per il fatto di essere, almeno in parte, in campo elastico. L'andamento del dominio resistente (Fig. 10) è approssimativamente parabolico in assenza di armatura "principale" e raggiunge il massimo sempre in corrispondenza ad uno sforzo normale  $N_{c,Rd}$ . Si può quindi ancora ritenere che la curva che delimita il dominio limite  $M$ - $N$  sia costituita da tre tratti:

- un tratto lineare, per valori dello sforzo normale inferiori a  $-N_{sy,Rd}$  (trazione che può essere portata dalle armature secondarie);
- un tratto parabolico, per valori dello sforzo normale di compressione, compresi tra  $-N_{sy,Rd}$  e  $N_{c,Rd}$ ;
- un tratto con esponente dipendente dalla quantità di armatura (parabolico in assenza di armatura principale, ma via via più prossimo al lineare al crescere di tale armatura) per valori dello sforzo normale di compressione superiori a quello corrispondente al punto di massimo.

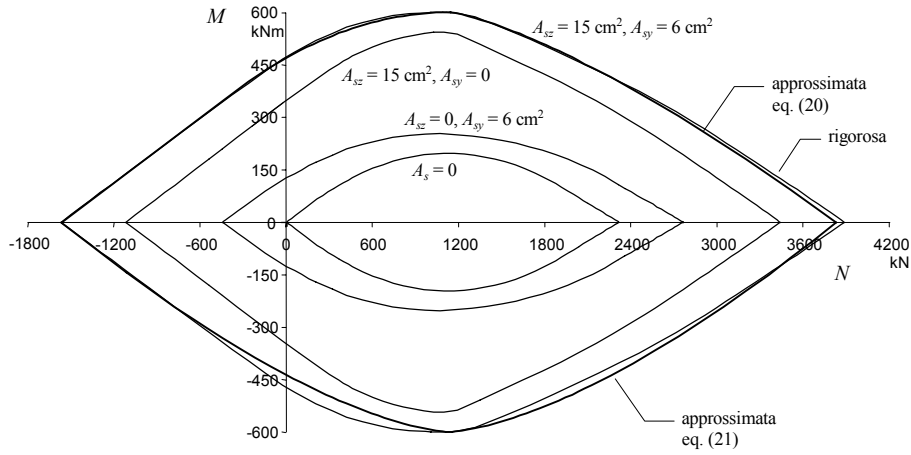


Fig. 10. Dominio  $M-N$  per pressoflessione retta, con armature su tutti i lati (sezione  $30 \times 70$ )

L'equazione dei tre tratti può essere espressa in funzione dei valori, che si indicano con i seguenti simboli:

$$\begin{aligned}
 N_{c,Rd} &= \frac{289}{594} b h \alpha f_{cd} & M_{c,Rd} &= \frac{289}{2376} b h^2 \alpha f_{cd} \\
 N_{sz,Rd} &= 2 A_{sz} f_{yd} & M_{sz,Rd} &= A_{sz} (h - 2c) f_{yd} \\
 N_{sy,Rd} &= 2 A_{sy} f_{yd} & M_{sy,Rd} &= k A_{sy} (h - 2c) f_{yd} \quad \text{assumendo } k=0.4
 \end{aligned} \tag{19}$$

La relazione tra momento limite  $M_{Rd}$  e sforzo normale limite  $N_{Rd}$  può essere espressa mediante le relazioni seguenti, che sono una generalizzazione delle (10)

– per  $N_{Rd} < -N_{sy,Rd}$

$$M_{Rd} = M_{sz,Rd} \left( 1 + \frac{N_{Rd} + N_{sy,Rd}}{N_{sz,Rd}} \right) \tag{20 a}$$

– per  $-N_{sy,Rd} \leq N_{Rd} \leq N_{c,Rd}$

$$M_{Rd} = (M_{c,Rd} + M_{sy,Rd}) \left[ 1 - \left( \frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sy,Rd}} \right)^2 \right] + M_{sz,Rd} \tag{20 b}$$

– per  $N_{Rd} > N_{c,Rd}$

$$\begin{aligned}
 M_{Rd} &= (M_{c,Rd} + M_{sz,Rd} + M_{sy,Rd}) \left[ 1 - \left| \frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}} \right|^n \right] \\
 \text{con } n &= 1 + \left( \frac{N_{c,Rd} + N_{sy,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}} \right)^2
 \end{aligned} \tag{20 c}$$

In alternativa, si può utilizzare per tutti i valori di  $N$  l'espressione, ottenuta come generalizzazione della (11)

$$\begin{aligned}
 M_{Rd} &= (M_{c,Rd} + M_{sz,Rd} + M_{sy,Rd}) \left[ 1 - \left| \frac{N_{Rd} - N_{c,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}} \right|^m \right] \\
 \text{con } m &= 1 + \left( \frac{N_{c,Rd} + N_{sy,Rd}}{N_{c,Rd} + N_{sz,Rd} + N_{sy,Rd}} \right)
 \end{aligned} \tag{21}$$

## Verifica e progetto a pressoflessione deviata

### Verifica

La verifica a pressoflessione deviata può essere facilmente effettuata determinando preliminarmente mediante le espressioni (20) oppure (21) i momenti resistenti  $M_{z,Rd}$  e  $M_{y,Rd}$  corrispondenti allo sforzo normale agente (le stesse espressioni valgono per entrambi i momenti, purché si scambi  $b$  con  $h$  e  $y$  con  $z$ ) e verificando quindi la disequazione

$$\left(\frac{M_{z,Sd}}{M_{z,Rd}}\right)^{1.5} + \left(\frac{M_{y,Sd}}{M_{y,Rd}}\right)^{1.5} \leq 1 \quad (22)$$

### Progetto della sezione e dell'armatura

Nella maggior parte dei casi reali le sezioni rettangolari non sono soggette contemporaneamente a forti momenti rispetto ad entrambi gli assi. Ad esempio, la nuova norma sismica italiana richiede di considerare l'effetto del sisma agente in una direzione più il 30% del sisma nella direzione ortogonale. Si può facilmente controllare dalla (22) che per  $M_{y,Sd} = 0.3 M_{y,Rd}$  il massimo momento  $M_z$  che può essere sopportato dalla sezione è pari a  $0.89 M_{z,Rd}$ . La presenza della componente trasversale riduce la capacità portante della sezione di circa un 10%, ma tale riduzione è compensata, spesso ampiamente, dal contributo delle armature secondarie che in genere viene trascurato.

Si consiglia quindi di progettare la sezione e l'armatura a pressoflessione retta, usando rispettivamente le espressioni (14) e (16), cioè senza tener conto né del contributo peggiorativo del momento trasversale né dell'incremento di resistenza fornito dall'armatura secondaria. La correttezza di tale dimensionamento andrà infine verificata mediante la (22).

## Conclusioni

La lunga trattazione della pressoflessione retta e deviata, qui riportata, porta a conclusioni estremamente semplici dal punto di vista operativo. Si è mostrato, infatti, che il progetto di una sezione soggetta a pressoflessione retta può essere effettuato in maniera analoga a quanto si fa usualmente per la flessione semplice. La verifica può essere condotta, con ottima approssimazione, con formule di immediata applicazione. E, per quanto riguarda la pressoflessione deviata, si è mostrato che il progetto può essere effettuato con riferimento alla pressoflessione retta, mentre la verifica si riconduce al controllo di una semplice disequazione.

## Bibliografia

1. Eurocodice 2. *Progettazione delle strutture di calcestruzzo. Parte 1-1: Regole generali e regole per gli edifici*, ENV 1992-1-1.
2. A. Ghersi, *Tecnica delle costruzioni. Il cemento armato*, CUEN, Napoli, 1998.
3. M.G. Sfakianakis, *Biaxial bending with axial force of reinforced, composite and repaired concrete sections of arbitrary shape by fiber model and computer graphics*, *Advances in Engineering Software*, 33, 227-242, 2002.
4. Ordinanza 3274. *Primi elementi in materia di criteri generali per la classificazione sismica del territorio nazionale e di normative tecniche per le costruzioni in zona sismica*, 2003.
5. A. Ghersi, M. Muratore, *Calibrazione di una formulazione semplificata per la verifica a pressoflessione deviata allo S.L.U. di sezioni rettangolari in c.a.*, Convegno CTE, 2004 (in preparazione).
6. A. Ghersi, *Cemento armato. Tensioni ammissibili e stati limite: un approccio unitario*, Flaccovio, 2004 (in preparazione).

## Appendice

Effettuando le seguenti posizioni

$$\rho = \frac{A_s}{b h}$$

$$\gamma = \frac{c}{h}$$

$$v = \frac{N_{Sd}}{2 N_{c,Rd}}$$

$$v_s = \frac{N_{s,Rd}}{2 N_{c,Rd}} = \frac{\rho f_{yd}}{289 / 594 \alpha f_{cd}}$$

$$\mu_s = \frac{M_{s,Rd}}{M_{c,Rd}} = \frac{(1 - 2 \gamma) \rho f_{yd}}{289 / 2376 \alpha f_{cd}}$$

le (10) diventano

– per  $v$  minore di 0 (tensoflessione)

$$M_{Rd} = \frac{289}{2376} \mu_s \left(1 + \frac{v}{v_s}\right) \alpha f_{cd} b h^2$$

– per  $v$  compreso tra 0 e 0.5

$$M_{Rd} = \frac{289}{2376} \left[1 + \mu_s - (2v - 1)^2\right] \alpha f_{cd} b h^2$$

– per  $v$  maggiore di 0.5

$$M_{Rd} = \frac{289}{2376} (1 + \mu_s) \left[1 - \left(\frac{2v - 1}{1 + 2v_s}\right)^n\right] \alpha f_{cd} b h^2 \quad \text{con } n = 1 + \left(\frac{1}{1 + 2v_s}\right)^2$$

ed essendo  $h^2 = \frac{d^2}{(1 - \gamma)^2}$  si ha

$$\text{– per } v < 0 \quad r = \frac{1}{\sqrt{\frac{289}{2376} \mu_s \left(1 + \frac{v}{v_s}\right) \frac{\alpha f_{cd}}{(1 - \gamma)^2}}}$$

$$\text{– per } 0 \leq v \leq 0.5 \quad r = \frac{1}{\sqrt{\frac{289}{2376} \left[1 + \mu_s - (2v - 1)^2\right] \frac{\alpha f_{cd}}{(1 - \gamma)^2}}}$$

$$\text{– per } v > 0.5 \quad r = \frac{1}{\sqrt{\frac{289}{2376} (1 + \mu_s) \left[1 - \left(\frac{2v - 1}{1 + 2v_s}\right)^n\right] \frac{\alpha f_{cd}}{(1 - \gamma)^2}}} \quad \text{con } n = 1 + \left(\frac{1}{1 + 2v_s}\right)^2$$